Formulaire - Suites arithmétiques - Suites géométriques

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier naturel n. On appelle alors r la **raison** de la suite.

- Expression du terme général : pour $n \geq 0$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

- Expression de la somme des premiers termes : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit S_n par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors pour tout entier naturel n,

$$S_n = \frac{(n+1) \times (u_0 + u_n)}{2}.$$

- Somme de termes consécutifs : Plus généralement, si on cherche à calculer $u_p + \cdots + u_q$, avec $q \geq p \geq 0$, alors

$$u_p + \cdots + u_q = \frac{(q-p+1) \times (u_p + u_q)}{2}.$$

On retient souvent cette formule sous la forme :

$$u_p + \cdots + u_q = \frac{(\text{nb de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Suites géométriques

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier naturel n. On appelle alors q la **raison** de la suite.

- Expression du terme général : pour $n \geq 0$,

$$u_n = q^n u_0.$$

- Expression de la somme des premiers termes : pour $n \geq 0$, on définit S_n par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors pour tout entier naturel n, si $q \neq 1$, on a

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}.$$

  Si $q = 1$, $S_n = n + 1$.
- Somme de termes consécutifs : plus généralement, si $m \geq n \geq 0$, alors pour $q \neq 1$,

$$u_n + \cdots + u_m = \frac{u_n - u_{m+1}}{1-q}.$$

  On retient souvent cette formule sous la forme :

$$u_n + \cdots + u_m = \frac{\text{premier terme} - \text{terme qui suit le dernier}}{1 - \text{raison}}.$$

- Comportement à l'infini : une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$
  - tend vers $+\infty$ si $q > 1$;
  - est constante si $q = 1$;
  - tend vers 0 si $|q| < 1$;
  - n'a pas de limites si $q \leq -1$.

Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout entier n. En général, on demande $a \neq 1$ et $b \neq 0$ pour ne pas avoir une suite arithmétique ou une suite géométrique.

On cherche alors ℓ la solution de l'équation

$$\ell = a\ell + b,$$

puis on étudie la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - \ell.$$

On prouve facilement que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison a. On